Insur. B.

Separatabdruck aus der «Zeitschrift für schweiz. Statistik», 43. Jahrgang, 1907.

LIBRARY NOV 3 1907

Der Reduktionsfaktor

in der

Theorie der Krankenversicherung

und die

Besselschen Funktionen

3 1761 09626659 8

Inaugural-Dissertation

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Karl Böschenstein

von Stein a. Rh. und Bern.

Bern.

Buchdruckerei Stämpfli & Cie.

1907.

Separatabdruck aus der «Zeitschrift für schweiz. Statistik», 43. Jahrgang, 1907.

Der Reduktionsfaktor

in der

Theorie der Krankenversicherung

und die

Besselschen Funktionen

Inaugural-Dissertation

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Bern

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Karl Böschenstein

von Stein a. Rh. und Bern.

Bern.

Buchdruckerei Stämpfli & Cie.

1907.

Von der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. Graf und Dr. Moser angenommen.

Bern, den 24. Oktober 1906.

Der Dekan:
Prof. Dr. *G. Huber.*

Herrn

Prof. Dr. CHRISTIAN MOSER

in dankbarer Erinnerung.

Die vorliegende Arbeit wurde auf den Rat des Herrn Professor Dr. Christian Moser ausgeführt, für dessen Unterstützung ich noch bestens danke. Es liegt mir ferner noch die angenehme Pflicht ob, meinen Lehrern, den Herren Professoren Dr. Ch. Moser, Dr. J. H. Graf und Dr. G. Huber für ihr Wohlwollen, das sie mir während meinen Studien so reichlich bewiesen haben, an dieser Stelle den wärmsten Dank auszusprechen.

Der Reduktionsfaktor in der Theorie der Krankenversicherung und die Besselschen Funktionen.

Einleitung.

Die Unterstützungsdauer der einzelnen Kassen in der Krankenversicherung ist verschieden. Um einen Vergleich ziehen zu können, müssen wir ihre Leistungen für die nämliche Unterstützungsdauer berechnen; als Zeiteinheit wählt man das Jahr. Das Verhältnis der durchschnittlichen Zahl der Krankentage während einer beliebigen Unterstützungsdauer zur durchschnittlichen Zahl der Krankentage während der Unterstützungsdauer von einem Jahre wird durch eine Grösse gegeben, die in der Theorie der Krankenversicherung als *Reduktionsfaktor* bezeichnet wird. Meines Wissens führte Prof. Dr. Hermann Kinkelin in seiner Schrift „Die gegenseitigen Hilfsgesellschaften der Schweiz 1880“ [1]) den Reduktionsfaktor in die Versicherungsrechnung ein. Diese Arbeit enthält eine Tabelle (XI, pag. 56), in welcher nach den Beobachtungen Heyms für jedes Alter die Zahl der Krankentage per Jahr unter der Voraussetzung angegeben ist, dass die Unterstützungsdauer mindestens ein volles

[1]) In Kommission bei Schmid, Francke & Cie., Bern 1887 pag. 43 u. ff.

Jahr betrage. Um nun die Verminderung der Krankentage bei kürzerer Unterstützungsdauer zu berechnen, führte Prof. Dr. Kinkelin den Reduktionsfaktor ein: „Wenn die Unterstützungsdauer kein ganzes Jahr beträgt, so erhält man die durchschnittliche Zahl der Krankentage für irgend ein Alter, wenn man diejenige für die einjährige Unterstützung (Tab. XI) mit einem *Reduktionsfaktor* multipliziert, welcher folgende Werte besitzt" etc.

Bezeichnet nun allgemein $f(t)$ die Zahl der Krankentage bei einer Unterstützungsdauer von t Jahr, wo $t < 1$, so ist, wenn $f(1)$ die Zahl der Krankentage bei einer einjährigen Unterstützungsdauer bedeutet,

$$f(t) = R(t) \cdot f(1).$$ [1])

$R(t)$ heisst Reduktionsfaktor.

Am dritten internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker im Jahre 1900 in Paris hat Prof. Dr. Christian Moser in Bern in seiner Arbeit „Communication touchant une table de morbidité" [2]) Werte für eine nach dem Alter der Versicherten abgestufte Krankheitsordnung gegeben. Ebenso finden sich dort Angaben über den Reduktionsfaktor. Als Grundlage dienten mehrjährige Beobachtungen bei der „Krankenkasse für den Kanton Bern". Diese umfassen bei rund 11,000 Mitgliedern total 359,341 Krankentage. Am Schlusse bemerkt der Referent:

---

[1]) Man vergleiche Dr. *Christ. Moser:* „Denkschrift über die Höhe der finanziellen Belastung, welche den nach dem Entwurfe zu einem Bundesgesetze betreffend die Krankenversicherung einzurichtenden Krankenkassen voraussichtlich erwachsen wird." Veröffentlicht durch das schweizerische Industriedepartement. II. Auflage, 1895, pag. 81.

[2]) Rapports présentés au 3e Congrès international d'actuaires, Paris 1900.

„Les facteurs de réduction peuvent être représentés approximativement par une expression de la forme

$$k \int_0^t s^x \, g^{\frac{1}{c+x}} \, dx,$$

dans laquelle k, s, g et c représentent quatre constantes à déterminer et t la durée assurée d'assistance. On sait que l'intégrale conduit aux fonctions désignées sous le nom de fonctions Besséliennes.“

Mit diesem Integral befasst sich die vorliegende Arbeit und es soll zunächst dargetan werden, dass die Lösung desselben auf Besselsche Funktionen erster Art führt. Ferner soll gezeigt werden, dass die Konstanten k, s, g und c linear bestimmt werden können. Hieran knüpfen wir einige numerische Auswertungen und bringen zum Schluss noch eine weitere Anwendung des Integrals.

I. Lösung des Integrals $k \int_0^t s^x \, g^{\frac{1}{c+x}} \, dx.$

Im Protokoll des dritten internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker 1900 in Paris finden wir über die Arbeit von Prof. Moser [1]):

„Quant à la durée pendant laquelle les indemnités seront payées, on arrive à des constatations remarquables. L'orateur montre comment la formule finale, tout d'abord empirique, est — dans un autre domaine — un pendant de la formule Makeham. On

[1]) Rapports présentés au 3e Congrès international d'actuaires, Paris, séance du 29 juin 1900; page 1054.

l'obtient aussi, en considérant une force libérant d'une maladie (Entkrankungskraft) qui est constituée par deux composantes, l'une inversement proportionnelle au carré d'un temps déterminée et l'autre constante.“

Diese Entkrankungskraft bestimmte Prof. Moser

$$\mu(x) = a + \frac{b}{(c+x)^2}, \qquad (1)$$

wo a, b und c konstant sind.

Unter der Intensitätsfunktion versteht man in der Versicherungsrechnung diejenige Funktion, die die Abnahme einer gegebenen Funktion für einen Zeitpunkt darstellt, bezogen auf die Zeitdauer 1 und den Grössenbetrag 1; man bezeichnet sie mit μ [1]).

Es sei $f(x)$ eine beliebige Funktion der Zeit; dieselbe wird nach der Zeit $\triangle(x)$ den Wert $f(x+\triangle x)$ annehmen und die Abnahme der Funktion $f(x)$, bezogen auf den Grössenbetrag 1 und die Zeitdauer 1, beträgt

$$\frac{f(x) - f(x+\triangle x)}{f(x) \cdot \triangle x}.$$

Lassen wir $\triangle x$ der Grenze 0 nähern, so wird

$$\lim_{\triangle x = 0} \frac{f(x) - f(x+\triangle x)}{f(x)\,\triangle x} = \frac{-df(x)}{f(x)\,dx}$$

$$= \frac{-f'(x)}{f(x)} = \frac{d \log \frac{1}{f(x)}}{dx}; \qquad (2)$$

d. h.: Die Intensität einer Funktion ist stets gleich dem negativen Quotienten aus der ersten Ableitung der Funktion und der Funktion selbst.

[1]) Man vergleiche: Prof. Dr. Christian Moser, Die Intensität der Sterblichkeit und die Intensitätsfunktion. Zeitschr. für schweiz. Statistik, 42. Jahrgang, 1906, II. Band, pag. 109—114, und Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker; I. Jahrgang, 1. Heft, 1906, pag. 27—44.

Es gebe nun $\lambda(x)$ die Zahl der Kranken im Alter x an; dann wird die Intensität der Erkrankung nach Gleichung (2)

$$\mu(x) = \frac{-\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{d \log \frac{1}{\lambda(x)}}{dx}. \qquad (3)$$

Unter Berücksichtigung von (1) und (3) folgt

$$\frac{d \log \frac{1}{\lambda(x)}}{dx} = a + \frac{b}{(c+x)^2};$$

integriert:

$$\log \frac{1}{\lambda(x)} = ax - \frac{b}{c+x} - Ko,$$

wo Ko Integrationskonstante ist. Hieraus folgt

$$\frac{1}{\lambda(x)} = e^{ax - \frac{b}{c+x} - Ko}$$

$$\lambda(x) = e^{Ko - ax + \frac{b}{c+x}}. \qquad (4)$$

Setzt man $e^{Ko} = k$,

$e^{-a} = s$,

$e^{b} = g$,

so wird die Gleichung (4)

$$\lambda(x) = k\, s^x\, g^{\frac{1}{c+x}}. \qquad (5)$$

Dies ist die Formel von Moser, welche dem Makehamschen Gesetze

$$l(x) = k\, s^x\, g^{c^x}$$

sehr ähnlich ist.

Es gibt $\lambda(x)\, dx$ die Zeit an, welche von den $\lambda(x)$ Kranken im nächsten Moment gemeinsam durchlebt wird; es stellt daher das Integral

$$\int_0^t \lambda(x)\, dx$$

die von den $\lambda(x)$ Kranken gemeinsam im Zeitraum t durchlebte Krankheitszeit dar. Als Zeiteinheit wählen wir das tropische Jahr mit 365,2422 Tagen. Setzt man $t = 1$, so wird das Integral zu

$$\int_0^1 \lambda(x)\, dx,$$

und der Reduktionsfaktor $R(t)$ wird nach der eingangs gegebenen Definition

$$R(t) = \frac{\int_0^t \lambda(x)\, dx}{\int_0^1 \lambda(x)\, dx}. \qquad (6)$$

Wir setzen nun

$$\frac{1}{\int_0^1 \lambda(x)\, dx} = C$$

als konstant; dann wird die Gleichung (6) unter Berücksichtigung von (5)

$$R(t) = C k \int_0^t s^x g^{\frac{1}{c+x}}\, dx,$$

und, indem wir für die Konstanten wieder ihre Exponentialwerte einsetzen, zu

$$R(t) = C e^{Ko} \int_0^t e^{-ax + \frac{b}{c+x}}\, dx. \qquad (7)$$

Man substituiere $c + x = z$, so geht dies über in

$$R(t) = C e^{Ko+ac} \int_c^{c+t} e^{-az + \frac{b}{z}}\, dz.$$

$$e^{-az} = 1 - az + \frac{a^2}{2!}z^2 - \frac{a^3}{3!}z^3 + - \ldots + (-1)^\lambda \frac{a^\lambda}{\lambda!}z^\lambda \ldots$$

$$e^{\frac{b}{z}} = 1 + bz^{-1} + \frac{b^2}{2!}z^{-2} + \frac{b^3}{3!}z^{-3} + \ldots + \frac{b^\alpha}{\alpha!}z^{-\alpha} + \ldots$$

Allgemeiner Term: $(-1)^\lambda \frac{a^\lambda\ b^\alpha}{\lambda!\ \alpha!} z^{\lambda-\alpha}$.

Wir setzen $\alpha = n + \lambda$, dann wird das allgemeine Glied des Produktes:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{(ab)^\lambda\ b^n}{\lambda!\,(n+\lambda)!} z^{-n}.$$

Die Summe erinnert nun in der Tat (vergl. Einleitung) an die Besselsche Funktion I. Art, deren Definitionsgleichung lautet

$$\overset{n}{J}_{(y)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}. \tag{8}$$

Wir geben der Summe die Besselsche Form:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{(ab)^\lambda\ b^n}{\lambda!\,(n+\lambda)!} z^{-n} = b^n z^{-n} \cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(ab)^{\frac{n+2\lambda}{2}}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\ \overset{n}{J}_{(y)},$$

wo $y = 2\sqrt{ab}$.

Die Summe aller Glieder wird

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\ \overset{n}{J}_{(y)},$$

und die Gleichung (7) geht über in

$$R(t) = C\,e^{Ko+ac}\int_c^{c+t}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\overset{n}{J}_{(y)}\,dz$$

$$= C\,e^{Ko+ac}\left[\int_c^{c+t}\overset{0}{J}_{(y)}\,dz + \int_c^{c+t}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} z^{-1}\overset{1}{J}_{(y)}\,dz\right.$$

$$\left. + \int_c^{c+t}\sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\overset{n}{J}_{(y)}\,dz + \int_c^{c+t}\sum_{n=-1}^{n=-\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\overset{n}{J}_{(y)}\,dz\right].$$

Wir lösen die einzelnen Integrale und lassen das Argument der J-Funktion weg:

I. Integral: $\int_c^{c+t}\overset{0}{J}\,dz = \overset{0}{J}t.$

II. Integral: $\int_c^{c+t}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} z^{-1}\overset{1}{J}\,dz = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\overset{1}{J}\log\frac{c+t}{c}.$

III. $\int_c^{c+t}\sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\overset{n}{J}\,dz =$

$$\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{1}{1-n}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\overset{n}{J}\Big[(c+t)^{1-n} - {}^{-n}.$$

IV. $\int_c^{c+t}\sum_{n=-1}^{n=-\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} z^{-n}\overset{n}{J}\,dz =$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\overset{-n}{J}\Big[(c+t)^{n+1} - c^{n+1}\Big].$$

Nach Gleichung (8) wird aber

$$\overset{-n}{J}_{(y)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^{\lambda} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{-n+2\lambda}}{\lambda!\,(\lambda-n)!},$$

oder, $\lambda = n + m$ gesetzt,

$$\overset{-n}{J}_{(y)} = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^{n+m} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{n+2m}}{(n+m)!\,m!}$$

$$= (-1)^{n} \overset{n}{J}_{(y)}.$$

Berücksichtigen wir dies und setzen wieder das Argument von J ein, so wird der Reduktionsfaktor

$$R(t) = C e^{Ko+ac} \Bigg\{ \overset{0}{J}_{(y)}\, t + \overset{1}{J}_{(y)} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \log \frac{c+t}{c} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} t \left(c + \frac{t}{2}\right) \right] + \sum_{n=2}^{n=\infty} \overset{n}{J}_{[y)} \left[\frac{1}{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} \left(c^{1-n} - (c+t)^{1-n} \right) + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} \left((c+t)^{n+1} - c^{n+1} \right) \right] \Bigg\}. \quad (9)$$

Dies ist die Lösung des Integrals mit Hülfe der Besselschen Funktionen.

Wir knüpfen an diese Formel noch einige Spezialfälle. Die Entkrankungskraft zerlegte Prof. Moser in zwei Komponenten [1]), von denen die eine in bezug auf die Zeit x konstant ist und alle Ursachen umfasst, welche unabhängig von x auf die Dauer der Krankheit einwirken. Die andere Komponente ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Zeit $c + x$.

---

[1]) Siehe Gleichung (1).

Wir setzen vorerst die erste Komponente $= 0$.

$$a = 0;$$

dann wird das Argument der J-Funktion

$$y = 2\sqrt{ab} = 0,$$

und die Besselschen Funktionen werden

$$\overset{0}{J}_{(y)} = \frac{1}{0!\,0!}\left(\frac{y}{2}\right)^0 - \frac{1}{1!\,1!}\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\,2!}\left(\frac{y}{2}\right)^4 - + \ldots.,$$

$$\overset{1}{J}_{(y)} = \frac{1}{0!\,1!}\left(\frac{y}{2}\right)^1 - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{y}{2}\right)^5 - + \ldots.,$$

. . . . . .

$$\overset{n}{J}_{(y)} = \frac{1}{0!\,n!}\left(\frac{y}{2}\right)^n - \frac{1}{1!\,(n+1)!}\left(\frac{y}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2!\,(n+2)!}\left(\frac{y}{2}\right)^{n+4} - + \ldots.$$

Wird nun y sehr klein, so können gegenüber dem ersten Gliede alle nachfolgenden fallen gelassen werden, somit

$$\overset{0}{J}_{(y)} = 1,$$

$$\overset{1}{J}_{(y)} = \sqrt{ab},$$

. . . . . .

$$\overset{n}{J}_{(y)} = \frac{1}{n!}\left(\sqrt{ab}\right)^n.$$

Da ferner $\frac{a}{b} = 0$; so geht die Formel über in

$$\underset{a=0}{R(t)} = C\, e^{Ko}\left\{t + b \log \frac{c+t}{c} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{b^n}{n!\,(n-1)}\left[c^{1-n} - (c+t)^{1-n}\right]\right\}. \quad (10)$$

Setzen wir auch die zweite Komponente 0, also

$$b = 0,$$

so verschwinden alle Glieder innerhalb der Klammer bis auf das erste Glied, und der Reduktionsfaktor wird proportional der Zeit, nämlich

$$\underset{a=b=0}{R(t)} = Ce^{Ko} \cdot t. \qquad (11)$$

Wir setzen nun zuerst die Komponente $b = 0$; dann wird auch hier das Argument der J-Funktion zu Null und die Gleichung (9) geht wie vorhin über in

$$\underset{b=0}{R(t)} = Ce^{Ko+ac}\left\{t - at\left(c + \frac{t}{2}\right) + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!\,(n+1)}\left[(c+t)^{n+1} - c^{n+1}\right]\right\}.$$

Da die zwei ersten Glieder in der Klammer dem allgemeinen Term der Summe für $n = 0$ und $n = 1$ entsprechen, so wird

$$\underset{b=0}{R(t)} = Ce^{Ko+ac} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n a^n}{(n+1)!}\left[(c+t)^{n+1} - c^{n+1}\right].$$

Es ist aber

$$\frac{(-1)^n a^n}{(n+1)!}\left[(c+t)^{n+1} - c^{n+1}\right] = -\frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}}{a\,(n+1)!}(c+t)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}}{a\,(n+1)!} c^{n+1} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{[-a\,(c+t)]^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{1}{a} \cdot \frac{[-ac]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Je der zweite Faktor bildet die um 1 verminderte Exponentialreihe; somit wird

$$\underset{b=0}{R(t)} = C\,e^{Ko+ac}\,\frac{1}{a}\left[e^{-ac} - e^{-a\,[c+t)}\right]$$

$$= C\,e^{Ko}\,\frac{1}{a}\left[1 - e^{-at}\right]$$

$$= C\,k\,\frac{1-s^t}{a}. \qquad (12)$$

Nähern wir nun auch a der Null, so können wir in der Reihe

$$e^{-at} = 1 - at + \frac{a^2 t^2}{2!} - \frac{a^3 t^3}{3!} + - \ldots .$$

ausser den zwei ersten Gliedern alle andern vernachlässigen, und es wird in erster Näherung

$$e^{-at} = 1 - at.$$

Dies eingesetzt

$$\underset{a=b=0}{R(t)} = C\,e^{Ko} \cdot \frac{1}{a}\left[1 - 1 + at\right]$$

$$= C\,e^{Ko}\,t.$$

Die Spezialfälle erhält man auch direkt, indem man im Integral in Gleichung (7) die entsprechende Komponente 0 setzt. Es war

$$R(t) = C\,e^{Ko}\int_0^t e^{-ax + \frac{b}{c+x}}\,dx.$$

Man setze $a = 0$; dann wird

$$\underset{a=0}{R(t)} = C\,e^{Ko}\int_0^t e^{\frac{b}{c+x}}\,dx,$$

$$c + x = z,$$

$$= C\, e^{Ko} \int_c^{c+t} e^{\frac{b}{z}}\, dz$$

$$= C\, e^{Ko} \int_c^{c+t} \left[1 + bz^{-1} + \frac{b^2}{2!} z^{-2} + \ldots\right] dz$$

$$= C\, e^{Ko} \left[z + b \log z + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{b^n}{n!\,(1-n)}\, z^{1-n}\right]_c^{c+t}$$

$$= C\, e^{Ko} \left\{ t + b \log \frac{c+t}{c} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{b^n}{n!\,(n-1)} \left[c^{1-n} - (c+t)^{1-n}\right]\right\}.$$

Ist $b = 0$, so wird die Gleichung (7) zu

$$\underset{b=0}{R(t)} = C\, e^{Ko} \int_0^t e^{-ax}\, dx$$

$$= C\, e^{Ko} \left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^t$$

$$= C\, e^{Ko}\, \frac{1 - e^{-at}}{a} = C\, k\, \frac{1 - s^t}{a}.$$

Wird $a = b = 0$, so wird

$$\underset{a=b=0}{R(t)} = C\, e^{Ko} \int_0^t dx$$

$$= C\, e^{Ko}\, t.$$

Die Intensitätsfunktion einer Funktion $f(x)$ ist nach Gleichung (2) definiert durch

$$\mu(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)};$$

die Intensitätsfunktion der $R(t)$-Funktion wird somit

$$\mu(t) = \frac{-R'(t)}{R(t)}.$$

Differenziert man Gleichung (9), so wird

$$R'(t) = Ce^{Ko+ac}\left\{ \overset{0}{J} + \overset{1}{J}\left[\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{c+t} - \sqrt{\frac{a}{b}}(c+t)\right] + \sum_{n=2}^{n=\infty} \overset{n}{J}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (c+t)^{-n} + (-1)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} (c+t)^n\right]\right\}$$

$$= C\, e^{Ko+ac} \sum_{n=0}^{n=\infty} \overset{n}{J}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (c+t)^{-n} + (-1)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} (c+t)^n\right]. \quad (13)$$

Es ist aber

$$R(t) = C \int_0^t \lambda(x)\, dx,$$

$$R'(t) = C\lambda(t). \quad (14)$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\lambda(t) = e^{Ko+ac} \sum_{n=0}^{n=\infty} \overset{n}{J}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} (c+t)^{-n} + (-1)^n \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} (c+t)^n\right]. \quad (15)$$

Wir haben somit das Mosersche Gesetz durch Besselsche Funktionen ausgedrückt.

Unter Berücksichtigung von (14) wird

$$\mu(t) = -C\frac{\lambda(t)}{R(t)},$$

d. h. die Abnahme der Intensität des Reduktionsfaktors ist gleich dem Quotienten aus den beiden Funktionen λ und R.

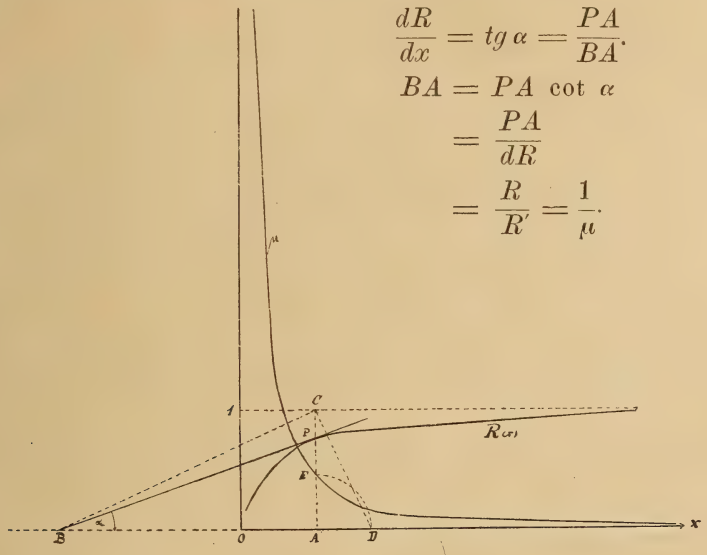
Die μ-Kurve lässt sich geometrisch aus der Funktionskurve konstruieren. Wird an eine beliebige Funktionskurve eine Tangente gelegt, so gibt die Subtangente den reziproken Wert der Intensität, der dem Berührungspunkte der Funktionskurve entspricht. Es soll dies an der $R(t)$-Kurve gezeigt werden.

$$\frac{dR}{dx} = tg\,\alpha = \frac{PA}{BA}.$$

$$BA = PA \cot \alpha$$

$$= \frac{PA}{dR}$$

$$= \frac{R}{R'} = \frac{1}{\mu}.$$



Zieht man im Abstand 1 parallel zur Abszissenachse eine Parallele, verlängert das Perpendikel in A nach C und konstruiert das rechtwinklige Dreieck BCD, so wird

$$BA : AC = AC : AD.$$

$$AC = 1;\ BA = \frac{1}{\mu};$$

Dann wird $AD = \mu$.

$AD = AE$; daher wird E ein Punkt der μ-Kurve.

Allgemein ist

$$\mu = \frac{-f'}{f},$$

$$\mu' = \frac{-ff'' + f'^2}{f^2}.$$

Für einen Extremfall von μ wird $\mu' = 0$, daher

$$ff'' = f'^2,$$
$$f : f' = f' : f''.$$

Setzt man $f = R$, so wird

$$R : R' = R' : R'',$$

d. h.: Die Intensität der R-Funktion wird zu einem Extremfall, wenn die erste Ableitung der Funktion das geometrische Mittel zwischen der Funktion selbst und ihrer zweiten Ableitung ist.

Die Intensität einer Intensitätsfunktion, die Intensitätsfunktion zweiter Ordnung, wird

$$\mu_2 = \frac{-\mu'_1}{\mu_1}, \text{ wo } \mu_2 = \text{Intensitätsfunktion II. Ordnung,}$$
$$\mu_1 = \text{„ I. „}$$

Aus (14) folgt

$$\mu_1 = -\frac{C\lambda}{R}; \; \mu_1' = \frac{-C\lambda' R + C\lambda R'}{R^2}$$

$$\mu_2 = \frac{-\lambda' R + \lambda R'}{-R\lambda} = \frac{-R'}{R} - \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

Die Intensitätsfunktion II. Ordnung der R-Funktion ist gleich der Differenz der Intensitätsfunktionen I. Ordnung der R-Funktion und der λ-Funktion.

II. Die Bestimmung der Konstanten k, s, g und c.

Wir gehen aus von der Gleichung (5):

$$\lambda(x) = k s^{x} g^{\frac{1}{c+x}}.$$

Zur Bestimmung der vier Konstanten sind vier Beobachtungen notwendig, die zu den Zeiten x_1, x_2, x_3 und x_4 gemacht werden. Diesen Zeiten entspreche die Zahl der Kranken $\lambda(x_1)$, $\lambda(x_2)$, $\lambda(x_3)$ und $\lambda(x_4)$; diese Zahlen seien bekannt. Es soll gezeigt werden, dass die Konstanten linear bestimmt werden können. Es ist

$$\lambda(x_1) = k s^{x_1} g^{\frac{1}{c+x_1}},$$
$$\lambda(x_2) = k s^{x_2} g^{\frac{1}{c+x_2}},$$
$$\lambda(x_3) = k s^{x_3} g^{\frac{1}{c+x_3}},$$
$$\lambda(x_4) = k s^{x_4} g^{\frac{1}{c+x_4}}.$$

Wir logarithmieren und subtrahieren je zwei Gleichungen von einander:

$$\log \lambda(x_1) - \log \lambda(x_2) = (x_1 - x_2) \log s + \frac{x_2 - x_1}{(c+x_1)(c+x_2)} \log g = A,$$

$$\log \lambda(x_2) - \log \lambda(x_3) = (x_2 - x_3) \log s + \frac{x_3 - x_2}{(c+x_2)(c+x_3)} \log g = B,$$

$$\log \lambda(x_3) - \log \lambda(x_4) = (x_3 - x_4) \log s + \frac{x_4 - x_3}{(c+x_3)(c+x_4)} \log g = C.$$

Aus je zwei Gleichungen eliminieren wir $\log s$ und erhalten

$$(x_2-x_3)A-(x_1-x_2)B=$$
$$\frac{(c+x_3)(x_2-x_1)(x_2-x_3)-(x_3-x_2)(x_2-x_1)(c+x_1)}{(c+x_1)(c+x_2)(c+x_3)}\log g,$$
$$(x_3-x_4)B-(x_2-x_3)C=$$
$$\frac{(c+x_4)(x_3-x_2)(x_3-x_4)-(x_4-x_3)(x_2-x_3)(c+x_2)}{(c+x_2)(c+x_3)(c+x_4)}\log g.$$

Durch Division und Reduktion folgt

$$\frac{(x_2-x_3)A-(x_1-x_2)B}{(x_3-x_4)B-(x_2-x_3)C}=\frac{(c+x_4)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{(c+x_1)(x_3-x_4)(x_2-x_4)}=D,$$

und hieraus kann c linear bestimmt werden mit

$$c=\frac{x_4(x_1-x_2)(x_1-x_3)-x_1(x_3-x_4)(x_2-x_4)\cdot D}{(x_3-x_4)(x_2-x_4)D-(x_1-x_2)(x_1-x_3)}. \quad (1)$$

Durch Substitution findet man leicht die übrigen Konstanten mit

$$\log g=\frac{[(x_2-x_3)A-(x_1-x_2)B](c+x_1)(c+x_2)(c+x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_1-x_3)}. \quad (2)$$

$$\log s=\frac{A}{x_1-x_2}+\frac{\log g}{(c+x_1)(c+x_2)}. \quad (3)$$

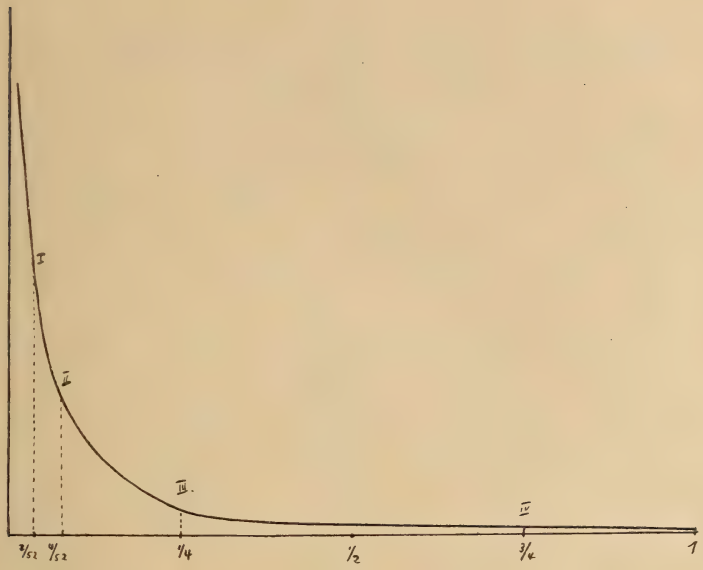
$$\log k=\log\lambda(x_1)-x_1\log s-\frac{1}{c+x_1}\log g. \quad (4)$$

Um numerische Werte für die Konstanten zu erhalten, benützen wir aus der Denkschrift[1]) von Prof. Moser die Tabelle I^e auf Seite 91.

Um Werte zu erhalten, die der Kurve $\lambda(x)$ in der Ausdehnung eines Jahres genügen, legen wir die Kurve durch die Beobachtungszeiten nach 2, 4, 13 und 39 Wochen.

---

[1]) Siehe Anmerkung Seite 8.



I. Beobachtung nach 2 Wochen:

$$x_1 = 0{,}038\,331 \text{ Jahr} \qquad \lambda(x_1) = 6531$$

II. Beobachtung nach 4 Wochen:

$$x_2 = 0{,}076\,661 \text{ Jahr} \qquad \lambda(x_2) = 3210$$

III. Beobachtung nach 13 Wochen:

$$x_3 = 0{,}249\,150 \text{ Jahr} \qquad \lambda(x_3) = 654$$

IV. Beobachtung nach 39 Wochen:

$$x_4 = 0{,}747\,449 \text{ Jahr} \qquad \lambda(x_4) = 131$$

Zeiteinheit ist das tropische Jahr mit $365{,}2422$ Tagen.

Die Konstanten nehmen die Werte an:

$$c = 0{,}141\,707,$$
$$\log g = 0{,}294\,6446,$$
$$\log s = 0{,}446\,4266 - 1,$$
$$\log k = 2{,}199\,6854.$$

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Werte an, die die durchgelegte Kurve annimmt.

Zeitintervall in		Zahl der Kranken am Ende des Intervalls		Differenz
Tagen	Jahren	Beobachtet	Berechnet	
7	0,019 165	10 493	10 461	— 32
14	0,038 331	6 531	6 531	0
21	0,057 496	4 422	4 425	+ 3
28	0,076 661	3 210	3 210	0
35	0,095 827	2 398	2 438	+ 40
42	0,114 992	1 895	1 922	+ 27
49	0,134 155	1 559	1 558	— 1
56	0,153 323	1 322	1 299	— 23
63	0,177 484	1 139	1 102	— 37
70	0,191 654	982	950	— 32
77	0,210 819	851	830	— 21
84	0,229 984	736	733	— 3
91	0,249 150	654	654	0
119	0,325 811	454	447	— 7
147	0,402 473	325	329	+ 4
182	0,498 300	244	242	— 2
273	0,747 449	131	131	0
365	0,999 337	92	81	— 11

III. Numerische Auswertung der Formel für den Reduktionsfaktor.

Im I. Teil wurde der Reduktionsfaktor definiert durch

$$R(t) = Ce^{Ko+ac}\left\{ {}^{0}_{(y)}J t + {}^{1}_{(y)}J\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \log\frac{c+t}{c} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} t\left(c+\frac{t}{2}\right)\right] + \sum_{n=2}^{n=\infty} {}^{n}_{(y)}J\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\left(c^{1-n} - (c+t)^{1-n}\right) + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\left((c+t)^{n+1} - c^{n+1}\right)\right]\right\}.$$

Ferner setzten wir

$$\frac{1}{\int_0^1 \lambda(x)\,dx} = C.$$

Das Integral gibt die von den beobachteten Kranken während eines Jahres gemeinsam durchlebte Krankheitszeit an. Aus der Statistik der „Krankenkassen des Kantons Bern“ erhält man für Männer (1884 bis 1893) total 365 830 Krankentage [1]). Nimmt man das tropische Jahr als Zeiteinheit an, so wird

$$C = \frac{\dot{365},_{2422}}{365\,830}$$

$$= 0,_{000\,998\,39}$$

Da die Konstanten bestimmt sind, so erhält man

$$e^{Ko} = k = 158,_{346\,84},$$

$$e^{-a} = s;\ a = -\lg s = 1,_{27465}.$$

[1]) Aus Denkschrift von Dr. Moser, pag. 91. Tab. Ie, Sp. 8.

$$e^b = g; \quad b = \lg g = 0{,}678\,421.$$

$$\frac{a}{b} = 1{,}87885, \quad \frac{b}{a} = 0{,}532241.$$

$$Ce^{Ko+ac} = 0{,}198\,423.$$

Das Argument der J-Funktion ist

$$y = 2\sqrt{ab} = 1{,}85984.$$

Die $\overset{n}{J}$-Funktionen nehmen die Werte an

$$\overset{0}{J} = 0{,}305\,172\,840$$

$$\overset{1}{J} = 0{,}581\,793\,890$$

$$\overset{2}{J} = 0{,}320\,465\,482$$

$$\overset{3}{J} = 0{,}107\,439\,186$$

$$\overset{4}{J} = 0{,}026\,142\,075$$

$$\overset{5}{J} = 0{,}005\,009\,493$$

$$\overset{6}{J} = 0{,}000\,792\,991$$

$$\overset{7}{J} = 0{,}000\,107\,018$$

$$\overset{8}{J} = 0{,}000\,012\,593$$

$$\overset{9}{J} = 0{,}000\,001\,314$$

$$\overset{10}{J} = 0{,}000\,000\,1231$$

$$\overset{11}{J} = 0{,}000\,000\,01045$$

$$\overset{12}{J} = 0{,}000\,000\,000\,8149$$

$$\overset{13}{J} = 0{,}000\,000\,000\,023\,875$$

Die Konstanten c^{1-n} und c^{n+1} werden

$n =$	c^{1-n}	c^{n+1}
2	$= 7{,}_{05683}$	$= 0{,}_{002\,845\,582}$
3	$= 49{,}_{7988}$	$= 0{,}_{000\,403\,240}$
4	$= 351{,}_{422}$	$= 0{,}_{000\,057\,142}$
5	$= 2479{,}_{92}$	$= 0{,}_{000\,008\,0973}$
6	$= 175\,00{,}_{4}$	$= 0{,}_{000\,001\,1474}$
7	$= 123\,497$	$= 0{,}_{000\,000\,1626}$
8	$= 817\,500$	$= 0{,}_{000\,000\,02304}$
9	$= 6\,150\,024$	
10	$= 43\,399\,670$	
11	$= 306\,264\,010$	
12	$= 2\,161\,252\,700$	
13	$= 15\,251\,593\,000$	

Die positiven Potenzen haben gegenüber den negativen Potenzen einen geringen Einfluss und können in erster Näherung fallen gelassen werden. Dadurch reduziert sich der Koeffizient der J-Funktion in der Σ um den zweiten Teil. Der Fehler wird durch den Zeichenwechsel des fallen gelassenen Ausdruckes noch verkleinert. Der Einfluss dieses Fehlers ist aus den nachfolgenden Beispielen ersichtlich.

1. Nach 8 Wochen $=$ 56 Tage $= 0{,}_{153\,323}$ Jahr.

	Nach der Formel	Näherungswert	Differenz
$\overset{0}{J}t$	$= 0{,}_{046\,790}$	$0{,}_{046\,790}$	
$\overset{1}{J}\cdot$ Klammer	$= 0{,}_{284\,554}$	$0{,}_{284\,554}$	
$\sum_{n=2}^{n=\infty} \overset{n}{J}\cdot$ Klammer	$= 3{,}_{624\,441}$	$3{,}_{623\,473}$	$-0{,}_{000\,968}$
	$3{,}_{955\,785}$	$3{,}_{954\,817}$	
$R\,(0{,}_{153\,323})$	$= 0{,}_{74931}$	$0{,}_{74913}$	$-0{,}_{00018}$.

2. Nach $^1/_4$ Jahr = 91 Tage = $0{,}_{249\ 150}$ Jahr.

$\overset{0}{J}t$	$0{,}_{076\ 034}$	$0{,}_{076\ 034}$	
$\overset{1}{J}$ · Klammer	$0{,}_{377\ 728}$	$0{,}_{377\ 728}$	
$\sum \overset{n}{J}$ · Klammer	$4{,}_{014\ 507}$	$4{,}_{008\ 480}$	$-0{,}_{006\ 027}$
	$4{,}_{468\ 269}$	$4{,}_{462\ 242}$	
$R\,(0{,}_{249\ 150})$ =	$0{,}_{84639}$	$0{,}_{84525}$	$-0{,}_{00114}$.

3. Nach $^1/_2$ Jahr = 182 Tage = $0{,}_{498\ 300}$ Jahr.

$\overset{0}{J}t$	$0{,}_{152\ 068}$	$0{,}_{152\ 068}$	
$\overset{1}{J}$ · Klammer	$0{,}_{484\ 629}$	$0{,}_{484\ 629}$	
$\sum \overset{n}{J}$ · Klammer	$4{,}_{350\ 372}$	$4{,}_{308\ 279}$	$-0{,}_{042\ 093}$
	$4{,}_{987\ 069}$	$4{,}_{944\ 976}$	
$R\,(0{,}_{498\ 300})$ =	$0{,}_{94372}$	$0{,}_{93669}$	$-0{,}_{007\ 035}$

Wir vergleichen die erhaltenen Resultate mit den aus der Beobachtung resultierenden.

Zeit in Tagen	Beobachtung[1])	Berechnung: I. genau	Berechnung: II. annähernd	Differenzen $\triangle_1$	Differenzen $\triangle_2$
				%	%
56	0,739	0,749 31	0,749 13	+ 0,010 = 1,3	+ 0,010 = 1,3
91	0,830	0,846 39	9,845 25	+ 0,016 = 1,9	+ 0,015 = 1,8
182	0,928	0,943 72	0,936 69	+ 0,016 = 1,7	+ 0,009 = 0,97

[1]) Entnommen der Denkschrift von Dr. Moser, pag. 91.

IV. Die Krankheitsfrequenz bis zum Ablaufe der versicherten Krankheitsdauer.

Einer neugegründeten Krankenkasse erwächst in der ersten Geschäftsperiode dadurch eine Vergünstigung, dass bei der Eröffnung der Kasse kein Krankenbestand aus der vorhergehenden Periode vorhanden ist. Erst nach Ablauf einer Übergangszeit, welche gleich der maximalen Unterstützungszeit ist, wird die Kasse in „vollem Betriebe“ sein.

Um das günstige Resultat dieser Übergangszeit zu beurteilen, vergleichen wir die Zahl der in diese Übergangszeit fallenden Krankentage mit der Zahl der zu entschädigenden Krankentage, welche die in dieser Zeit erfolgenden Erkrankungen überhaupt mit sich bringen.

Es bezeichne

$$w(t)\,dt$$

die Zahl der Erkrankungen, die zur Zeit t im Momente dt vorkommen. Es sei ferner α die Dauer der Übergangsperiode, und wir nehmen an, dass die Erkrankungen sich gleichmässig über die Zeit α verteilen; dann wird $w(t)$ konstant $= U$. Von der Zeit t bis zum Schluss der Übergangszeit α ist eine Frist von $\alpha - t$ Jahr. Es sind daher für die Udt-Erkrankungen

$$CR(\alpha - t) \cdot Udt$$

Krankentage in Rechnung zu setzen, wo C eine Konstante bedeutet.

Die Gesamtzahl der in die Übergangszeit α fallenden Krankentage wird somit:

$$C \cdot U \int_0^{\alpha} R(\alpha - t)dt.$$

Die Udt-Erkrankungen würden für die Kasse für die versicherte Krankheitsdauer α an zu entschädigenden Krankheitstagen

$$CR(\alpha)Udt$$

ausmachen, somit für sämtliche in die Übergangszeit α fallende Erkrankungen:

$$\int_0^{\alpha} CR(\alpha)Udt = \alpha CUR(\alpha).$$

Das gesuchte Verhältnis der Vergünstigung wird daher

$$v(\alpha) = \frac{CU \int_0^{\alpha} R(\alpha - t)dt}{\alpha CUR(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\alpha R(\alpha)} \int_0^{\alpha} R(\alpha - t)\,dt.$$

Setzt man $\alpha - t = t'$ und schreibt nach Vertauschung der Grenzen wieder t für t', so wird

$$v(\alpha) = \frac{1}{\alpha R(\alpha)} \int_0^{\alpha} R(t)dt.\ ^{1}) \qquad (1)$$

---

[1]) Diese Ableitung findet sich in der Denkschrift von Dr. Moser, pag. 189—192.

Wir haben somit, um diese Begünstigung der ersten Rechnungsperiode zu finden, die Gleichung für den Reduktionsfaktor nach der Zeit zu integrieren; wir erhalten

$$v(\alpha) = \frac{C e^{Ko+ac}}{\alpha R(\alpha)} \int_0^{\alpha} \Big\{ {}^{0}J \cdot t + {}^{1}J \Big[\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \log \frac{c+t}{c} - \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{1}{2}} t \Big(c + \frac{t}{2}\Big) \Big] + \sum_{n=2}^{n=\infty} {}^{n}J \Big[\frac{1}{n-1} \Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{n}{2}} \Big(c^{1-n} - (c+t)^{1-n} \Big) + \frac{(-1)^n}{n+1} \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{n}{2}} \Big((c+t)^{n+1} - c^{n+1} \Big) \Big] \Big\} dt. \qquad (2)$$

(Wir lassen der Einfachheit wegen das Argument der J-Funktion weg.) Wir zerlegen das Integral in vier Integrale:

$$\int_0^{\alpha} {}^{0}J t\, dt + \int_0^{\alpha} {}^{1}J \Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \log \frac{c+t}{c}\, dt - \int_0^{\alpha} {}^{1}J \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{1}{2}} t \cdot \Big(c + \frac{t}{2}\Big) dt + \int_0^{\alpha} \sum_{n=2}^{n=\infty} {}^{n}J \Big[\frac{1}{n-1} \Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{n}{2}} \Big[c^{1-n} - (c+t)^{1-n} \Big] + \frac{(-1)^n}{n+1} \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{n}{2}} \Big[(c+t)^{n+1} - c^{n+1} \Big] \Big] dt.$$

I. Integral wird: ${}^{0}J \frac{\alpha^2}{2}$.

II. Integral: Wir setzen $\frac{c+t}{c} = x$, so geht es über in

$$\text{II} = {}^{1}J \Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{1}{2}} c \int_1^{\frac{c+\alpha}{c}} \log x\, dx = {}^{1}J \Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{1}{2}} c \Big[x \log x - x \Big]_1^{\frac{c+\alpha}{c}}$$

$$= {}^{1}J \Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big[(c+\alpha) \log \frac{c+\alpha}{c} - \alpha \Big].$$

Integral III: $\overset{1}{J}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\alpha}\left[ct+\frac{t^2}{2}\right]dt=\overset{1}{J}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\alpha^2 c}{2}+\frac{\alpha^3}{6}\right].$

Das IV. Integral wird zerlegt in

$$\int_0^{\alpha}\sum_{n=2}^{n=\infty}\overset{n}{J}\frac{1}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}c^{1-n}\,dt-\int_0^{\alpha}\overset{2}{J}\cdot\frac{b}{a}\cdot(c+t)^{-1}\,dt$$

$$-\int_0^{\alpha}\sum_{n=3}^{n=\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}(c+t)^{1-n}\,dt$$

$$+\int_0^{\alpha}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\left[(c+t)^{n+1}-c^{n+1}\right]dt$$

$$=\sum_{n=2}^{n=\infty}\overset{n}{J}\frac{1}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}c^{1-n}\cdot\alpha-\overset{2}{J}\cdot\frac{b}{a}\cdot\log\frac{c+\alpha}{c}$$

$$-\sum_{n=3}^{n=\infty}\overset{n}{J}\frac{1}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{(c+\alpha)^{2-n}-c^{2-n}}{2-n}$$

$$+\sum_{n=2}^{n=\infty}\overset{n}{J}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\left[\frac{(c+\alpha)^{n+2}-c^{n+2}}{n+2}-c^{n+1}\alpha\right].$$

Wir addieren die einzelnen Werte:

$$\overset{0}{J}\frac{\alpha^2}{2}+\overset{1}{J}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left((c+\alpha)\log\frac{c+\alpha}{c}-\alpha\right)-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha^2 c}{2}+\frac{\alpha^3}{6}\right)\right]$$

$$+\overset{2}{J}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha}{c}-\log\frac{c+\alpha}{c}\right)+\frac{a}{b}\left(\frac{(c+\alpha)^4-c^4}{12}-\frac{c^3\alpha}{3}\right)\right]$$

$$+\sum_{n=3}^{n=\infty}\overset{n}{J}\left\{\frac{1}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\left[c^{1-n}\alpha+\frac{(c+\alpha)^{2-n}-c^{2-n}}{n-2}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\left[\frac{(c+\alpha)^{n+2}-c^{n+2}}{n+2}-c^{n+1}\alpha\right]\right\}.$$

Durch Zusammenziehen und Einsetzen folgt:

$$v(\alpha) = \frac{C e^{Ko+ac}}{\alpha R(\alpha)} \Bigg\{ \overset{0}{J}\frac{\alpha^2}{2} + \overset{1}{J}\Bigg[\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left((c+\alpha)\log\frac{c+\alpha}{c} - \alpha\right) - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha^2(3c+\alpha)}{6}\Bigg]$$

$$+ \overset{2}{J}\Bigg[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha}{c} - \log\frac{c+\alpha}{c}\right) + \frac{a}{12b}\Big((c+\alpha)^4 - c^3(c+4\alpha)\Big)\Bigg]$$

$$+ \sum_{n=3}^{n=\infty} \overset{n}{J}\Bigg[\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}\Big((c+\alpha)^{2-n} + c^{1-n}([n-2]\alpha - c)\Big)$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}\Big((c+\alpha)^{n+2} - c^{n+1}([n+2]\alpha + c)\Big)\Bigg]\Bigg\}. \quad (3)$$

Bei der numerischen Auswertung verschwindet bei wachsendem n der zweite Teil der Klammer unter der Σ gegenüber dem ersten Teil schon nach wenigen Gliedern. Unter Benützung der Resultate aus dem III. Teile erhalten wir für $v(\alpha)$ folgende Werte:

I. Beispiel: $\alpha = 91$ Tage $= 0{,}_{249\ 150}$ Jahr.

$$\overset{0}{J}\frac{\alpha^2}{2} = 0{,}_{009\ 472}$$

$$\overset{1}{J} \cdot [\,] = 0{,}_{006\ 935}$$

$$\overset{2}{J} \cdot [\,] = 0{,}_{125\ 946}$$

$$\sum_{n=3}^{n=\infty} \overset{n}{J} \cdot [\,] = 0{,}_{652\ 913}$$

$$\text{Klammer} = 0{,}_{795\ 266}$$

$$v\,(0{,}_{249\ 150}) = \frac{0{,}_{189\ 423} \cdot 0{,}_{795\ 266}}{0{,}_{249\ 150} \cdot 0{,}_{846\ 39}}$$

$$= 0{,}_{714\ 35}.$$

Sieht somit die in Gründung begriffene Krankenkasse eine Maximalbezugsdauer des Krankengeldes von einem Vierteljahr in den Statuten vor, so erfährt sie für ihr erstes Vierteljahr eine Erleichterung in der Zahl der Krankentage von

$$\mathbf{28}_{,56}\ \%.$$

II. Beispiel: $\alpha = 182$ Tage $= 0_{,498\,300}$ Jahr.

$$\overset{0}{J}\frac{\alpha^2}{2} = 0_{,037\,888}$$

$$\overset{1}{J} \cdot [\,] = 0_{,167\,596}$$

$$\overset{2}{J} \cdot [\,] = 0_{,391\,690}$$

$$\sum_{n=3}^{n=\infty} \overset{n}{J} \cdot [\,] = \underline{1_{,455\,757}}$$

$$\text{Klammer} = 2_{,052\,931}.$$

$$v\,(0_{,498\,30}) = \frac{0_{,189\,423} \cdot 2_{,052\,931}}{0_{,498\,30} \cdot 0_{,943\,72}}$$

$$= \mathbf{0}_{,826\,93}$$

Die Begünstigung beträgt somit bei Unterstützung bis zu einem halben Jahre

$$\mathbf{17}_{,31}\ \%.$$

Mit Hülfe des Moserschen Gesetzes können wir eine Integration zur Bestimmung des Reduktionsfaktors und der Krankheitsfrequenz in der ersten Periode rechnerisch durchführen. Herr Prof. Moser bemerkt am Schlusse seines Kapitels über die Krankheitsfrequenz[1]):

„Zur Bestimmung von $R(t)$ ist man auf die Beobachtung angewiesen. Legt man die im ersten Ab-

[1]) Denkschrift, pag. 192.

schnitte aus der Beobachtung der bernischen „Kantonalen Krankenkasse“ gefundenen Werte für eine gemischte Bevölkerung zugrunde, so lässt sich eine Integration auf graphischem Wege vornehmen. Für die drei Werte

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,$$

welche einer Maximalbezugsdauer von einem Viertel-, einem halben und einem ganzen Jahre entsprechen, ergibt sich dann

$$v\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}_{74}$$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}_{81}$$

$$v\ (1)\ = 0{,}_{86}.$$

Wir hatten für die Männer die Werte erhalten:

$$v\left(\frac{1}{4}\right) = 0{,}_{714\,35},$$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = 9{,}_{826\,93}.^{\alpha}$$

Im I. Abschnitt hatten wir drei Spezialfälle behandelt, die wir auch hier berücksichtigen wollen.

Für $a = 0$ wird der Reduktionsfaktor (I. Abschn., Gleichung 10)

$$\underset{a=0}{R(t)} = C\,e^{Ko}\left\{t + b\log\frac{c+t}{c} + \sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{b^n}{n!(n-1)}\left[c^{1-n} - (c+t)^{1-n}\right]\right\}.$$

Wir integrieren nochmals innerhalb der Grenzen 0 und α und erhalten

$$\frac{1}{C e^{Ko}} \int_0^{\alpha} \underset{a=0}{R}(t)\, dt = \frac{\alpha^2}{2} + b\left[(c+\alpha)\log\frac{c+\alpha}{c} - \alpha\right]$$

$$+ \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{b^n}{n!\,(n-1)} \cdot c^{1-n}\,\alpha$$

$$-\frac{b^2}{2}\log\frac{c+\alpha}{c} - \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{b^n\left[(c+\alpha)^{2-n} - c^{2-n}\right]}{(n-1)\,(2-n)\,n!}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} + b\left[c+\alpha-\frac{b}{2}\right]\log\frac{c+\alpha}{c} - \alpha b + \frac{\alpha b^2}{2c}$$

$$+ \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{b^n}{(n-1)\,n!}\left[\alpha c^{1-n} - \frac{c^{2-n} - (c+\alpha)^{2-n}}{n-2}\right].$$

Nach Gleichung (1) wird daher

$$\underset{a=0}{v}(\alpha) = \frac{C e^{Ko}\left\{\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha b^2}{2c} - \alpha b + b\left[c+\alpha-\frac{b}{2}\right]\log\frac{c+\alpha}{c}\right.}{\alpha\ \underset{a=0}{R}(\alpha)}$$

$$\left. + \sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{b^n}{(n-1)\,n!}\left[\alpha c^{1-n} - \frac{c^{2-n} - (c+\alpha)^{2-n}}{n-2}\right]\right\}}{\alpha\ \underset{a=0}{R}(\alpha)}. \quad (4)$$

II. Setzen wir $b = 0$, so wird $R(t)$ (Gleichung 12) definiert durch

$$\underset{b=0}{R}(t) = C e^{Ko}\,\frac{1}{a}\left[1 - e^{-at}\right].$$

Wir integrieren zwischen den Grenzen 0 und α und entwickeln die Potenz in eine Exponentialreihe:

$$\int_0^{\alpha} R(t)\,dt = \frac{C e^{Ko}}{a} \int_0^{\alpha} \left[at - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} - + \ldots \right] dt$$

$$= \frac{C e^{Ko}}{a} \left[\frac{a\alpha^2}{2} - \frac{a^2\alpha^3}{2!\,3} + \frac{a^3\alpha^4}{3!\,4} - + \ldots \right].$$

Die Vergünstigung wird in diesem Falle

$$\underset{b=0}{v(\alpha)} = \frac{\frac{C e^{Ko}}{a} \left[\frac{a\alpha^2}{2} - \frac{a^2\alpha^3}{2!\,3} + \frac{a^3\alpha^4}{3!\,4} - + \ldots \right]}{\frac{C e^{Ko}}{a} \left[1 - e^{-a\alpha} \right]}$$

$$= \frac{\frac{a^2\alpha^2}{2!} - \frac{a^3\alpha^3}{3!} + \frac{a^3\alpha^4}{4!} - + \ldots}{a\,[1 - e^{-a\alpha}]}$$

$$= \frac{e^{-a\alpha} - 1 + a\alpha}{a\,[1 - e^{-a\alpha}]}$$

$$\underset{b=0}{v(\alpha)} = \frac{\alpha}{1 - e^{-a\alpha}} - \frac{1}{a}. \tag{5}$$

III. Wird $a = b = 0$, so vereinfacht sich der Reduktionsfaktor nach Gleichung (11), I. Abschnitt, zu

$$\underset{a=b=0}{R(t)} = C e^{Ko} t.$$

Wir erhalten daher für

$$\underset{a=b=0}{v(\alpha)} = \frac{C e^{Ko} \frac{\alpha^2}{2}}{\alpha \cdot C e^{Ko} \alpha} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Sind beide Komponenten der Entkrankungskraft $\mu(x)$ Null, so wird die Vergünstigung für die erste Periode konstant, nämlich $^1/_2$.

Werden die vier Beobachtungsdaten zur Bestimmung der Konstanten der Moserschen Formel passend, d. h. so gewählt, dass die durch sie gelegte Kurve sich der wirklichen Krankenkurve anschmiegt, so gibt die Formel für den Reduktionsfaktor und für die Frequenz der ersten Krankheitsperiode Werte, die der Wirklichkeit sehr nahe kommen und verwertet werden können. Die maximale Abweichung bleibt in den Beispielen für den Reduktionsfaktor unter 2 %.